Approche polyédrale pour le problème du séparateur

M. Didi Biha[1] et M.J. Meurs[2]

[1] Laboratoire d'Analyse non Linéaire et Géométrie, 33 rue Louis Pasteur, 84000 Avignon
mohamed.didi-biha@univ-avignon.fr
[2] Laboratoire Informatique d'Avignon, 339 chemin des Meinajaries, Agroparc - B.P. 1228, F-84911 Avignon Cedex 9
marie-jean.meurs@univ-avignon.fr

Mots-clés : VSP, approche polyédrale, séparateur, graphe.

1 Introduction

Le problème du séparateur (VSP) dans un graphe connexe non orienté $G = (V, E)$ sur n sommets consiste à déterminer une partition $\{A, B, C\}$ de V telle qu'il n'existe aucune arête entre A et B, que $max\{|A|, |B|\} \leq \beta(n)$, où $\beta(n)$ est un entier, et pour laquelle $\sum_{i \in C} w_i$ est minimum (où w_i est un coût associé au sommet $i \in V$).

Le problème du séparateur (VSP) est un problème NP-difficile [1].

Dans le domaine des réseaux et télécommunications, un tel séparateur est vu comme un goulot d'étranglement lorsque le réseau est représenté par un graphe.
Dans le domaine du traitement automatique de la langue écrite, le concept de séparateur est utilisé en classification dans les grands graphes de termes. Les sommets du graphe sont les termes du domaine considéré et les arêtes du graphe représentent les relations syntaxiques entre les termes.
Dans le domaine de la bioinformatique, les séparateurs sont recherchés dans les graphes de grille modélisant la structure des protéines.

Notre travail repose sur une approche polyédrale du (VSP). La formulation de Balas et de Souza étant à notre connaissance la seule formulation sous la forme d'un programme linéaire en nombres entiers de ce problème, elle a été le point de départ de nos recherches. Grâce aux enrichissements que nous lui avons apportés, nos résultats améliorent très sensiblement ceux de Balas et De Souza [2].

2 Le polyèdre des séparateurs

Pour un graphe $G = (V, E)$ donné, on considère le cas particulier du (VSP) où deux sommets a et b non adjacents sont donnés et l'on cherche une partition $\{A, B, C\}$ de V telle qu'il n'existe aucune arête entre A et B, que $max\{|A|, |B|\} \leq \beta(n)$, où $\beta(n)$ est un entier, avec $a \in A$, $b \in B$ et pour laquelle $|C|$ est minimum (i.e. $\sum_{i \in C} w_i$ est minimum avec $w_i = 1,\ \forall i \in V$). Ce cas particulier sera nommé problème du « ab-séparateur ». La résolution d'au plus $\frac{n(n-1)}{2}$ sous-problèmes de ce type permet la résolution du (VSP) lorsque $w_i = 1,\ \forall i \in V$.

On appelle vecteur d'incidence d'une partition $\{A, B, C\}$ le vecteur donné par $X \in \{0, 1\}^{2(n-2)}$:

$$X = (x_{1a}, ..., x_{(n-2)a}, x_{1b}, ..., x_{(n-2)b}),\ où\ x_{ia} = 1 \Leftrightarrow i \in A,\ x_{ib} = 1 \Leftrightarrow i \in B,\ \forall i \in V \setminus \{a, b\}.$$

On désigne par P_{ab} le polyèdre associé au problème du ab-séparateur, défini par :
$P_{ab} = Conv\left\{X \in \mathbb{R}^{2(n-2)}\ tel\ que\ \exists\ un\ ab-séparateur\ \{A, B, C\}\ dont\ X\ est\ le\ vecteur\ d'incidence\right\}$.

Si X est le vecteur d'incidence d'un ab-séparateur $\{A, B, C\}$, alors X vérifie :

$$x_{ia} + x_{jb} \leq 1 \quad , \quad x_{ja} + x_{ib} \leq 1 \qquad \forall (i,j) \in E \tag{1}$$
$$x_{ia} + x_{ib} \leq 1 \qquad \forall i \in V \setminus \{a,b\} \tag{2}$$
$$\sum_{i=1}^{n-2} x_{ia} \leq \beta(n) - 1 \quad , \quad \sum_{i=1}^{n-2} x_{ib} \leq \beta(n) - 1 \qquad \forall i \in V \setminus \{a,b\} \tag{3}$$
$$x_{ia} \in \{0,1\} \qquad \forall i \in V \setminus \{a,b\} \tag{4}$$
$$x_{ib} \geq 0 \qquad \forall i \in V \setminus \{a,b\} \tag{5}$$

Balas et De Souza [3] ont montré que $P_{ab} = Conv\left\{X \in \mathbb{R}^{2(n-2)} \text{ } tel\ que\ X\ vérifie\ (1) \text{ à } (5)\right\}$.

Théorème : $dim(P_{ab}) = 2(n-2) - (|V(a)| + |V(b)|)$, où $V(a) \subset V$ et $V(b) \subset V$ sont les ensembles de sommets adjacents respectivement à a et à b.

Proposition 1 : Soient Γ_{ab} une chaîne entre a et b et $I(\Gamma_{ab})$ l'ensemble des sommets internes à Γ_{ab}. L'inégalité $\sum_{i \in I(\Gamma_{ab})} (x_{ia} + x_{ib}) \leq |I(\Gamma_{ab})| - 1$ est valide pour P_{ab}.

Pour toute paire (i, j) de sommets non adjacents de V, soit α_{ij} le nombre maximum de chaînes sommet-disjointes entre i et j et $\alpha_{min} = \mathrm{Min}\{\alpha_{ij},\ i \in V,\ j \in V,\ (i,j) \notin E\}$.

Proposition 2 : Pour chaque paire de sommets i et j non adjacents de $V \setminus \{a, b\}$, les inégalités suivantes sont valides pour P_{ab} :

$$\sum_{k=1}^{n-2} (x_{ka} + x_{kb}) - \alpha_{ij}(2 - x_{ia} - x_{jb}) \leq n - \alpha_{ij}$$
$$\sum_{k=1}^{n-2} (x_{ka} + x_{kb}) - \alpha_{ij}(2 - x_{ja} - x_{ib}) \leq n - \alpha_{ij}$$

Proposition 3 : Soit V' un sous-ensemble de V tel que le graphe G' induit par V' est connexe et $|V'| > \beta(n)$. Soit $\alpha_0^{V'} = Min\{\bar{\alpha}_{ij},\ i \in V',\ j \in V',\ (i,j) \notin E\}$, où $\bar{\alpha}_{ij}$ est le nombre maximum de chaînes sommet-disjointes entre i et j dans G'.
L'inégalité $\sum_{i \in V'} (x_{ia} + x_{ib}) \leq |V'| - Min\{\alpha_0^{V'}\ ,\ |V'| - \beta(n)\}$ est valide pour P_{ab}.

3 Résultats expérimentaux

Nous avons travaillé sur les instances étudiées par Balas et De Souza pour disposer d'éléments de comparaison. Les coupes que nous avons introduites ont sensiblement amélioré les résultats déjà obtenus par Balas et De Souza. En particulier, elles ont permis d'obtenir la solution optimale dans toutes les instances, y compris celles pour lesquelles Balas et De Souza n'ont donné que des solutions approchées.

Références

1. Thang Nguyen Bui and Curt Jones : Finding Good Approximate Vertex and Edge Partitions is NP-Hard. Information Processing Letters. Elsevier North-Holland, Inc. (1992)
2. Egon Balas and Cid C. de Souza : The vertex separator problem : algorithms and computations. Mathematical Programming. Springer Berlin / Heidelberg (2005)
3. Egon Balas and Cid C. de Souza : The vertex separator problem : a polyhedral investigation. Mathematical Programming. Springer Berlin / Heidelberg (2005)